### Лабораторная работа №12 «Решение задач массового обслуживания методами имитационного моделирования»

**Цель работы: н**аучиться оценивать надежность простейших систем методом Монте- Карло; научиться рассчитывать СМО с отказами методом Монте-Карло.

### Краткая теория

**Суть имитационного моделирования**

***Имитационное моделирование*** – получение экспериментальной информации о сложном объекте, которая не может быть получена иным путем, как экспериментируя с его моделью на ПЭВМ.

Как остроумно подметил Ю. Адлер, сочетание слов имитация и моделирование недопустимо и является тавтологией. Но, рассматривая исторический процесс формирования этого термина, пришли к выводу, что это словосочетание определяет в моделировании такую область, которая *относится к получению экспериментальной информации о сложном объекте, которая не может быть получена иным путем, как экспериментируя с его моделью на ПЭВМ*.

Имитационный объект имеет вероятностный характер функционирования. Для исследователя представляют интерес выводы, носящие характер статистических показателей, оформленных, может быть, даже в виде графиков или таблиц, в которых каждому варианту исследуемых параметров поставлены в соответствие определенные средние значения с набором характеристик их распределения, без получения зависимости в аналитическом виде.

Эта особенность является и достоинством, и одновременно, недостатком имитационным моделей. **Достоинство** в том, что резко расширяется класс изучаемых объектов, а **недостаток** – в отсутствии простого управляющего выражения, позволяющего прогнозировать результат повторного эксперимента. Но в реальной жизни также невозможно для сколько-нибудь сложного объекта получить точное значение экономического показателя, а только лишь его ожидаемое значение с возможными отклонениями.

**Главной функцией имитационной модели** является воспроизведение с заданной степенью точности прогнозируемых параметров её функционирования, представляющих исследовательский интерес. Как объект, так и его модель, должны обладать системными признаками.

Функционирование объекта характеризуется значительным числом параметров. Особое место среди них занимает временной фактор. В большинстве моделей имеется возможность масштабирования или введения машинного времени, т. е. интервала, в котором остальные параметры системы сохраняют свои значения или заменяются некоторыми обобщенными величинами. Таким образом, за счет этих двух процессов – укрупнения единицы временного интервала и расчета событий этого интервала за зависящий от мощности ПЭВМ временной промежуток – и создается возможность прогноза и расчета вариантов управленческих действий.

### Метод Монте-Карло

Неопределённость в предыдущих темах была стохастической. Поэтому строили аналитическую математическую модель и требовали, чтобы в данных задачах, рассматриваемые процессы были марковскими. На практике это не всегда выполняется и тогда требуется использовать методы имитационного моделирования. Что это такое рассказывалось в предыдущем параграфе, а теперь поговорим о самих методах имитационного моделирования.

Метод Монте-Карло является методом статистического моделирования или имитационного моделирования.

**Метод Монте-Карло** – это численный метод решения задач при помощи моделирования случайных величин.

Датой рождения метода Монте-Карло принято считать 1948 г. Создателями метода считают математиков Дж. Неймана и С. Улама.

Теоретическая основа метода была известна давно. Однако до появления ЭВМ этот метод не мог найти широкого применения.

Само название метода происходит от названия города Монте-Карло в княжестве Монако, знаменитого своими игорными домами. Дело в том, что одним из простейших механических приборов для получения случайных величин является рулетка. Возникает вопрос: помогает ли метод Монте-Карло выигрывать в рулетку? Нет, не помогает. И даже не занимается этим.

**Идея метода** чрезвычайно проста и состоит в следующем.

Вместо того чтобы описывать процесс с помощью аналитического аппарата, проводится розыгрыш случайного явления с помощью специально организованной процедуры, включающей в

себя случайность и дающей случайный результат. Реализация случайного процесса каждый раз складывается по-разному, т. е. мы получаем различные исходы рассматриваемого процесса. Это множество реализаций можно использовать как некий искусственно полученный статистический материал, который может быть обработан обычными методами математической статистики. После такой обработки можно получить: вероятность события, математическое ожидание и т. д.

При помощи метода Монте-Карло может быть решена любая вероятностная задача, но оправданным он является тогда, когда процедура розыгрыша проще, а не сложнее аналитического расчета.

### Оценка надежности простейших систем методом Монте-Карло

**Пример**: Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Система оказывает при отказе хотя бы одного блока. Первый блок содержит два элемента: А, В (они соединены параллельно) и оказывает при одновременном отказе обоих элементов. Второй содержит один элемент С и отказывает при отказе этого элемента.

а) Найти методом Монте-Карло оценку Р\* надежности (вероятности безотказной работы) системы, зная вероятности безотказной работы элементов: Р (А)=0,8, Р (В)=0,85, Р (С)=0,6; б) найти абсолютную погрешность Р-Р\* , где Р- надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 50 испытаний.

***Решение****.* а) Выбираем из таблицы приложения (*равномерно распределенные числа)* три случайных числа: 0,10, 0,09 и 0,73; по правилу \*) (*если случайное число меньше вероятности события, то событие наступило; если случайное число больше или равно вероятности события, то событие не наступило*) разыграем события А, В, С, состоящие в безотказной работе соответственно элементов А, В, С. Результаты испытания будем записывать в расчетную таблицу. Поскольку Р (А)=0,8 и 0,10 <0,8, то событие наступило, т.е. элемент А в этом испытании работает безотказно. Так как Р (В)=0,85 и 0,09< 0,85, то событие В наступило, т.е. элемент В

работает безотказно.

Таким образом, оба элемента первого блока работают; следовательно, работает и сам первый блок. В соответствующих клетках табл. ставим знак плюс.

Таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер испытания | Блок | Случайные числа, моделирующие  элементы | | | Заключение о работе | | | | |
| элементов | | | блоков | системы |
| А | В | С | А | В | С |
| 1 | Первый  Второй | 0,10 | 0,09 | 0,73 | **+** | **+** | **-** | **+**  **-** | **-** |
| 2 | Первый  Второй | 0,25 | 0,33 | 0,76 | **+** | **+** | **-** | **+**  **-** | **-** |
| 3 | Первый  Второй | 0,52 | 0,01 | 0,35 | **+** | **+** | **+** | **+**  **+** | **+** |
| 4 | Первый  Второй | 0,86 | 0,34 | 0,67 | **-** | **+** | **-** | **+**  **-** | **-** |

Так как Р (С)=0,6 и 0,73< 0,6, то событие С не наступило, т.е. элемент с получает отказ; Другими словами, второй блок, а значит и вся система, получают отказ. В соответствующих клетках табл. 57 ставим минус.

Аналогично разыгрываются и остальные испытания. В табл. приведены результаты четырех испытаний.

Произведя 50 испытаний, получим, что в 28 из них система работала безотказно. В качестве оценки искомой надежности Р примем относительную частоту Р \* =28/50=0,56.

б) Найдем надежность системы Р аналитически. Вероятности безотказной работы первого и второго блоков соответственно равны:

 

*P*1  1 *P*( *A*)\* *P*(*B*)  1 0.2 \* 0.15  0.97, *PA*  *P*(*C*)  0.6

Вероятность безотказной работы системы P=P1\*P2=0,97\*0,6=0,582

Искомая абсолютная погрешность Р-Р\*=0,582-0,56=0,022.

### Расчет СМО с отказами методом Монте-Карло

**Пример:** В трехканальную систему массового обслуживания с отказом поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону f()=5e-5 . Длительность обслуживания каждой заявки равна 0,5 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание *а* числа обслуженных заявок за время Т=4 мин.

### Решение:

Пусть Т1=0- момент поступления первой заявки. Заявка поступит в первый канал и будет им обслужена. Момент окончания обслуживания первой заявки Т1+0,5=0+0,5=0,5. В счетчик обслуженных заявок записываем единицу.

Моменты поступления последующих заявок найдем по формуле Т= Т-1+  ,

где  - длительность времени между двумя последовательными заявками с номерами -1 и

.

Возможные  = - (1/) ln ri = = (1/)(- ln ri ).

Учитывая, что, по условию, =5, получим  =0,2 (- ln ri ).

Случайные числа ri берем из таблицы приложения, начиная с первой строки сверху. Для

нахождения времени между поступлениями первой и второй заявок возьмем случайное число r=0,10.

Тогда 2=0,2\*(-ln 0,10)=0,2\*2,30=0,460. Первая заявка поступила в момент T1=0.

Следовательно, вторая заявка поступила в момент T2= T1+0,4600+0,460=0,460. В этот момент первый канал еще занят обслуживанием первой заявки, поэтому вторая заявка поступит во второй и будет им обслужена. Момент окончания обслуживания второй заявки T2+05=0,460+0.5=0.960 . В счетчик обслуженных заявок добавляем единицу.

По очередному случайному числу r=0.09 разыграем время 3 между поступлениями второй и третьей заявок:

3=0,2(-ln 0,09)=0,2\*2,41=0,482.

Вторая заявка поступила в момент T2= 0,460 . Поэтому третья заявка поступила в момент T3= T2+0,482=0,460+0,482=0,942. В этот момент первый канал уже свободен и третья заявка поступит в первый канал. Момент окончания обслуживания третьей заявки

T3+0,5=0,942+0,5=1,442.В счетчик обслуженных заявок добавляем единицу.

Дальнейший расчет производят аналогично (табл. 59), причем если момент поступления заявки все каналы заняты (момент поступления заявки меньше каждого из моментов окончания обслуживания), то в счетчик отказов добавляют единицу.

Заметим, что обслуживание 20-й заявки закончится в момент 4 148,>4, поэтому эта заявка получает отказ.

Испытание прекращают (в таблице записывают «стоп»), если момент поступления заявки

T>4.

Таблица

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| номер заявки i | Случай ное числоri | -ln ri | Время между двумя последовате льными заявками  i=0,2(-ln ri) | Момент поступлен ия заявки Ti= Ti-1+i | Момент Ti+0,5  окончания обслуживания заявки  каналом | | | Счетчик | |
| 1 | 2 | 3 | Обслу женны х  заявок | отказ ов |
| 1 |  |  |  | 0 | 0,500 |  |  | 1 |  |
| 2 | 0,10 | 2,30 | 0,460 | 0,460 |  | 0,960 |  | 1 |  |
| 3 | 0,09 | 2,41 | 0,482 | 0,942 | 1,442 |  |  | 1 |  |
| 4 | 0,73 | 0,32 | 0,064 | 1,006 |  | 1,506 |  | 1 |  |
| 5 | 0,25 | 1,39 | 0,278 | 1,284 |  |  | 1,784 | 1 |  |
| 6 | 0,33 | 1,11 | 0,222 | 1,506 | 2,006 |  |  | 1 |  |
| 7 | 0,76 | 0,27 | 0,054 | 1,560 |  | 2,060 |  | 1 |  |
| 8 | 0,52 | 0,65 | 0,130 | 1,690 |  |  |  |  | 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 9 | 0,01 | 4,60 | 0,920 | 2,610 | 3,110 |  |  | 1 |  |
| 10 | 0,35 | 1,05 | 0,210 | 2,820 |  | 3,320 |  | 1 |  |
| 11 | 0,86 | 0,15 | 0,030 | 2,850 |  |  | 3,350 | 1 |  |
| 12 | 0,34 | 1,08 | 0,216 | 3,066 |  |  |  |  | 1 |
| 13 | 0,67 | 0,40 | 0,080 | 3,146 | 3,646 |  |  | 1 |  |
| 14 | 0,35 | 1,05 | 0,210 | 3,356 |  | 3,856 |  | 1 |  |
| 15 | 0,48 | 0,73 | 0,146 | 3,502 |  |  | 4,002 |  | 1 |
| 16 | 0,76 | 0,27 | 0,054 | 3,556 |  |  |  |  | 1 |
| 17 | 0,80 | 0,22 | 0,044 | 3,600 |  |  |  |  | 1 |
| 18 | 0,95 | 0,05 | 0,010 | 3,610 |  |  |  |  | 1 |
| 19 | 0,90 | 00,10 | 0,020 | 3,630 |  |  |  |  | 1 |
| 20 | 0,91 | 0,09 | 0,018 | 3,648 | 4,148 |  |  |  | 1 |
| 21 | 0,17 | 1,77 | 0,354 | 4,002 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | (стоп) |  |  | итого | Х1=12 | 8 |

Из таблицы находим, что за 4 мин всего поступило 20 заявок; обслужено x1=12. Выполним аналогично еще пять испытаний, получим x2=15, x3=14, x4=12, x5=13, x6=15.

В качестве оценки искомого математического ожидания а числа обслуженных заявок примем выборочную среднюю



*a* \*= *х* =(2\*12+13+14+2\*15)/6=13,5.

**Задание**

1. Система состоит из двух блоков, соединенных последовательно. Первый блок содержит три элемента: А, В, С, а второй- два элемента: D, E. Элементы каждого блока соединены параллельно.

а) Найти методом Монте-Карло оценку Р\* надежности системы, зная вероятности безотказной работы элементов: Р(А)=0,8; Р(В)=0,9; Р(С)=0,85; Р(D)=0,7; P(E)=0,6;

б) найти абсолютную погрешность Р-Р\*, где Р- надежность системы, вычисленная аналитически. Произвести 15 испытаний.

1. В двухканальную систему массового обслуживания с отказом поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону f()=4e-4 . Длительность обслуживания каждой заявки равна 1 мин. Найти методом Монте-Карло математическое ожидание *а* числа обслуженных заявок за время Т=8 мин.